

# 时间序列分析：理论、统计推断与现代方法

博士研究生课程

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

## 课程简介

时间序列分析（Time Series Analysis）是统计学与计量经济学的核心分支，研究按时间顺序观测的随机过程的建模、推断与预测问题。本课程面向博士研究生，以严格的测度论概率框架为基础，系统讲授时间序列分析的完整理论体系与前沿方法。

课程以平稳性理论（弱/严格平稳、遍历性、Birkhoff 遍历定理）与 ARMA 模型（Wold 分解定理完整证明、因果性与可逆性的算子理论刻画）为核心基础，涵盖单位根检验的渐近理论（ADF 检验的极限分布推导）、谱分析（Herglotz 定理、周期图的渐近分布、核估计的一致性）、向量自回归（VAR 稳定性条件、Granger 因果检验、脉冲响应函数）、协整理论（Johansen 迹检验的渐近理论、VECM 表示）、状态空间模型（Kalman 滤波最优线性估计严格证明、EM 参数估计）、条件异方差模型（ARCH 效应检验、GARCH 严平稳充要条件推导、EGARCH）、非线性时间序列（门限 SETAR、Markov 区制转换、非参数方法）、长记忆过程（分整 ARFIMA、Hurst 指数、半参数估计）、高频数据与点过程（Hawkes 过程、实现波动率）、以及深度序列模型（Temporal Fusion Transformer、时序基础模型）。

通过完整的定理证明、渐近理论推导与计算方法，使学生掌握时间序列分析的完整理论体系，具备独立开展前沿研究的能力。

## 适合人群

- 统计学、计量经济学、数学、金融学等专业的博士研究生
- 机器学习与数据科学领域希望深入理解序列建模理论的研究人员
- 从事金融风险管理、宏观经济预测、信号处理等领域的高级研发人员
- 对随机过程与统计推断有研究兴趣的学者

## 前置知识

- 概率论与数理统计（测度论框架）： $\sigma$ -代数、条件期望、强大数定律、中心极限定理、鞅理论基础
- 实分析与泛函分析： $L^2$  空间、Hilbert 空间投影、Fourier 分析基础
- 线性代数：特征值分解、矩阵指数、Jordan 标准形
- 数理统计：最大似然估计、渐近理论（ $\sqrt{n}$ -一致性、Delta 方法）、假设检验
- 随机过程基础：平稳过程、协方差函数、谱表示（推荐）

## 第 1 讲 平稳性理论

- 弱平稳（Wide-Sense Stationary）与严格平稳（Strictly Stationary）的精确定义及其关系
- 遍历性（Ergodicity）的严格定义与 Birkhoff 个体遍历定理证明
- 均值遍历、协方差遍历的充分条件与反例
- 自协方差函数的非负定性证明（Bochner 定理预备）
- 平稳性的等价刻画：希尔伯特空间中的平移不变性

- 线性滤波对平稳性的保持性质
- 常见非平稳过程：趋势平稳、差分平稳与随机游走

## 第 2 讲 ARMA 模型

- AR/MA/ARMA 模型的算子表示与多项式根条件
- 因果性 (Causality) 严格定义与  $\sum |\psi_j| < \infty$  的充要条件
- 可逆性 (Invertibility) 的对称理论与  $\pi$ -权重收敛性
- Wold 分解定理：完整证明 (希尔伯特空间投影)
- ARMA 的唯一可逆因果表示与识别性
- 矩估计 (Yule-Walker 方程) 与 MLE 的渐近分布
- 模型选择：AIC/BIC 准则的理论基础

## 第 3 讲 ARIMA 与单位根

- 差分算子与  $I(d)$  过程的精确定义
- 随机游走的精细分析：泛函中心极限定理 (FCLT) 与 Wiener 过程收敛
- ADF 检验的渐近分布推导：Ornstein-Uhlenbeck 过程与 Dickey-Fuller 分布
- KPSS 检验 (平稳性原假设) 的渐近理论
- 含截距与趋势的单位根检验的极限分布修正
- 协整的 Engle-Granger 两步法
- 季节性单位根检验

## 第 4 讲谱分析

- 谱密度存在性证明：绝对可和自协方差的充分条件
- Herglotz 定理：正定序列与谱测度的一一对应 (完整证明)
- 周期图的渐近分布：卡方分布近似与渐近独立性
- 谱密度估计：Bartlett/Parzen 核估计的偏差-方差权衡与一致性证明
- 线性过程的谱密度公式  $f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} |\psi(e^{-i\lambda})|^2$
- 交叉谱 (Cross-Spectrum) 与相干函数
- 多窗 (Multitaper) 谱估计简介

## 第 5 讲向量自回归 (VAR)

- VAR( $p$ ) 模型的矩阵表示与伴随矩阵 (Companion Matrix)
- 稳定性条件：特征根模均小于 1 的代数刻画与充要性证明
- OLS 估计的渐近正态性 (稳定 VAR 情形)
- Granger 因果 (Granger Causality) 的严格定义与 Wald 检验
- 移动平均表示 (VMA( $\infty$ )):  $\Psi_j$  矩阵的递推计算
- 脉冲响应函数 (IRF): 正交化 Cholesky 分解与估计的置信带
- 预测误差方差分解 (FEVD) 与历史分解

## 第 6 讲协整与误差修正

- $I(1)$  过程与协整空间的代数结构
- Granger 表示定理：VECM 与 VMA( $\infty$ ) 的等价性证明
- Johansen 迹检验 (Trace Test) 的渐近理论推导：矩阵值布朗运动
- Johansen 最大特征值检验与迹检验的比较
- 协整秩的估计：逐步检验程序
- VECM 的 MLE 估计与 Johansen 估计量的收敛速率
- 协整应用：购买力平价、股票市场共整合

## 第 7 讲状态空间模型

- 一般线性状态空间模型 (SSM) 与卡尔曼滤波 (Kalman Filter)
- Kalman 滤波最优线性估计的严格证明 (希尔伯特空间投影定理)
- 新息表示 (Innovation Form) 与预测分解
- 卡尔曼平滑器 (Kalman Smoother): 固定区间平滑
- EM 算法 (Expectation-Maximization) 推导与参数收敛性
- SSM 中的 MLE: 对数似然函数的高效计算
- 时变参数模型与局部线性趋势模型

## 第 8 讲条件异方差

- ARCH 效应的 Engle 检验与 LM 统计量渐近分布
- GARCH( $p, q$ ) 模型: 严平稳 (Strict Stationarity) 的充要条件推导 (Top Lyapunov 指数)
- GARCH 的弱平稳条件:  $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$  的代数推导
- GARCH 的 QMLE: 一致性与渐近正态性
- EGARCH (Nelson 1991): 非对称杠杆效应建模
- GJR-GARCH 与 APARCH 模型族
- 多变量 GARCH: DCC-GARCH 与动态相关系数

## 第 9 讲非线性时间序列

- 门限自回归 (TAR/SETAR): Tong (1990) 框架与区制识别
- SETAR 的平稳性条件与极限分布
- Markov 区制转换 (Hamilton 1989): 隐马尔可夫链与 EM 估计
- 门限检验: Hansen (1999) 的 sup-LM 检验与 Bootstrap 分布
- 非参数时间序列方法: 核平滑、局部多项式估计
- 函数系数自回归 (FAR) 模型
- 测试线性性: RESET 检验、BDS 检验

## 第 10 讲长记忆过程

- 长记忆的谱域定义:  $f(\lambda) \sim C\lambda^{-2d}$ ,  $\lambda \rightarrow 0$
- 分整 ARFIMA( $p, d, q$ ) 过程: 分数差分算子  $(1 - L)^d$  的定义与性质
- Hurst 指数  $H$  与分整参数  $d$  的关系:  $H = d + 1/2$
- 分数 Brownian 运动 (fBm) 与 ARFIMA 的连接
- 半参数估计: GPS 估计量 (Geweke-Porter-Hudak) 的渐近分布
- 局部 Whittle 估计量的一致性与渐近正态性证明
- 长记忆检验: Lo 修正 R/S 统计量与渐近理论

## 第 11 讲高频数据与点过程

- 高频金融数据特征: 非等间距、日历效应、市场微结构噪声
- 实现波动率 (Realized Volatility): 连续半鞅框架与一致性
- 实现方差的渐近分布: Barndorff-Nielsen-Shephard 定理
- 两尺度实现估计量 (TSRV): 微结构噪声修正
- 点过程与强度函数: 条件强度与 Papangelou 强度
- Hawkes 过程: 自激励机制、似然函数与 MLE
- Hawkes 过程在金融中的应用: 订单流建模、跳跃检测

## 第 12 讲深度序列模型

- 序列学习的深度架构演进: RNN/LSTM 到 Transformer
- Seq2Seq 框架: 编码器-解码器与注意力机制的数学表示
- Temporal Fusion Transformer (TFT): 多头注意力与门控机制

- 时序基础模型 (Foundation Models): TimesFM、Chronos、Moirai
- 深度模型的概率预测：分位数回归与保形预测 (Conformal Prediction)
- 深度模型的统计一致性：何时深度模型优于经典方法
- 时序预测基准测试与评价方法论

## 参考书目

---

1. **Brockwell, P. J. & Davis, R. A.** *Time Series: Theory and Methods*. 2nd ed. Springer, 1991. [经典教材：平稳性、ARMA、谱分析]
2. **Hamilton, J. D.** *Time Series Analysis*. Princeton University Press, 1994. [计量视角：ARIMA、协整、状态空间、ARCH]
3. **Tsay, R. S.** *Analysis of Financial Time Series*. 3rd ed. Wiley, 2010. [金融应用：GARCH、非线性、高频数据]
4. **Lütkepohl, H.** *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer, 2005. [VAR、协整、VECM 权威教材]
5. **Fan, J. & Yao, Q.** *Nonlinear Time Series: Nonparametric and Parametric Methods*. Springer, 2003. [非线性与非参数时间序列]
6. **Beran, J.** *Statistics for Long-Memory Processes*. Chapman & Hall, 1994. [长记忆过程权威参考]
7. **Anderson, B. D. O. & Moore, J. B.** *Optimal Filtering*. Prentice-Hall, 1979. [Kalman 滤波理论]
8. **Engle, R. F.** Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Econometrica*, 50(4), 987–1007, 1982. [ARCH 创始论文]
9. **Johansen, S.** *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*. Oxford University Press, 1995. [协整推断理论]
10. **Hawkes, A. G.** Spectra of Some Self-Exciting and Mutually Exciting Point Processes. *Biometrika*, 58(1), 83–90, 1971. [Hawkes 过程原始文献]
11. **Barndorff-Nielsen, O. E. & Shephard, N.** Econometric Analysis of Realized Volatility. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 64(2), 253–280, 2002. [实现波动率渐近理论]
12. **Das, A. et al.** A Decoder-Only Foundation Model for Time-Series Forecasting. *ICML 2024*. [时序基础模型 TimesFM]

## 授课教师

---

教师 MarkZZZ

微信 MarkZZZ20XX