

# 鲁棒优化

不确定性下的决策 · 从经典鲁棒到分布鲁棒优化

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

## 课程简介

鲁棒优化 (Robust Optimization, RO) 是处理**数据不确定性**的现代优化方法论。与随机规划依赖概率分布假设不同, 鲁棒优化仅假设不确定参数属于某个**不确定集**  $U$ , 通过在最坏情形下优化来获得确定性可行保证。本课程从经典鲁棒线性规划出发, 系统讲解不确定集的构造与保守性分析、鲁棒对应的推导与计算可处理性、鲁棒锥优化 (SOCP/SDP)、可调鲁棒优化与仿射决策规则, 并深入扩展至**分布鲁棒优化** (DRO), 涵盖基于矩信息的半定规划重整化和基于 Wasserstein 距离的数据驱动建模。全部 10 讲注重严格的数学推导、完整的定理证明与丰富的建模实例, 达到研究生 (博士) 课程水平。

## 适合人群

- 运筹学、优化理论、应用数学方向的博士研究生
- 已掌握线性规划对偶理论与凸优化 (锥优化) 基础的高年级硕士生
- 从事供应链、金融工程、能源系统、机器学习等领域, 需要系统掌握不确定性建模理论的研究者和工程师

## 前置知识

- **线性规划**: 标准形式、对偶理论 (强对偶、互补松弛)、灵敏度分析
- **凸优化**: 凸集与凸函数、对偶理论 (Lagrange 对偶、Slater 条件)、锥优化 (LP/SOCP/SDP)
- **线性代数**: 矩阵运算、正定矩阵、特征值分解、Schur 补
- **实分析基础**: 范数、紧性、连续性、上确界/下确界
- **概率论基础** (DRO 部分需要): 期望、方差、矩条件、Wasserstein 距离

## 1 课程内容

讲次	主题	内容概要
1	鲁棒优化导论	不确定性的来源与分类 (测量/预测/模型误差); 名义优化的脆弱性 (LP 顶点敏感性); 灵敏度分析 vs 随机规划 vs 鲁棒优化的系统比较; 鲁棒对应 (RC) 的一般框架; 鲁棒可行性与鲁棒最优性; Soyster (1973) 模型的完整推导与保守性分析; 鲁棒性代价 (PoR) 的定义与单调性证明

讲次	主题	内容概要
2	不确定集的构造	盒式不确定集与 $l_\infty$ -范数; 椭球不确定集与 Mahalanobis 距离 (Ben-Tal & Nemirovski 1998); 多面体不确定集; 预算不确定集 (Bertsimas & Sim 2004) 与概率保证; 范数不确定集的统一框架; 数据驱动不确定集构造 (置信区域方法); 不确定集大小与保守性/可靠性的定量分析
3	鲁棒线性规划	约束不确定的鲁棒 LP: 盒式 $\rightarrow$ LP、椭球 $\rightarrow$ SOCP、多面体 $\rightarrow$ LP (对偶化); 目标不确定的鲁棒 LP; 行不确定 vs 列不确定的处理方法; 对偶化技巧的完整推导; 概率保证分析 (Bertsimas-Sim 定理); 约束违反概率的 Bonferroni 界
4	鲁棒锥优化	鲁棒 SOCP 与矩阵不确定性; 鲁棒 SDP 的困难性 (NP-hard); S-引理 (S-Lemma) 与单个二次约束的鲁棒化; 二次约束的椭球不确定集 $\rightarrow$ SDP 转化; 鲁棒半定规划的松弛方法; 结构化不确定性 (仿射依赖) 的可处理性
5	可调鲁棒优化	静态 vs 可调 (adaptive) 决策; 两阶段鲁棒优化模型的一般形式; 可调 RO 的 NP-hard 性证明; 列与约束生成算法 (C&CG); 精确求解方法: Benders 分解、KKT 条件嵌入; 多阶段可调鲁棒优化
6	仿射可调近似	线性决策规则 (LDR / Affine Decision Rule); 仿射可调 RC 的推导 (半无限 $\rightarrow$ 有限); LDR 最优性条件 (何时精确?); 提升策略 (Lifted LDR) 与分段线性规则; 扩展决策规则 (Extended LDR); 近似质量的理论分析与实验评估
7	分布鲁棒优化导论	从 RO 到 DRO 的概念扩展; 模糊集 (Ambiguity Set) 的一般框架; DRO 的 minimax 对偶理论 (弱对偶与强对偶条件); DRO 与经典鲁棒优化、随机规划的关系; 连贯风险度量与 DRO 的对偶表示
8	基于矩的分布鲁棒优化	矩约束模糊集 (均值、协方差、支撑集); Scarf (1958) 报童模型与最优界; 矩问题的半定规划重整化 (Bertsimas & Popescu 2005); 广义矩问题与多项式优化; 均值-方差-支撑集三重约束的可处理性; 与机会约束的关系 (Chebyshev 型界)

讲次	主题	内容概要
9	基于 Wasserstein 的分布鲁棒优化	Wasserstein 距离与最优传输理论；数据驱动模糊集 $\{P : d_W(P, \hat{P}_N) \leq \epsilon\}$ ；强对偶定理与有限维对偶重整化；可处理性分析 (LP/SOCP/SDP 重构)；有限样本保证与渐近一致性；与正则化经验风险最小化的等价性
10	应用专题与课程总结	鲁棒投资组合优化 (均值-方差与 CVaR)；鲁棒供应链与库存管理；机器学习中的鲁棒性 (对抗训练、分布偏移)；电力系统中的鲁棒调度；十讲知识体系总结与前沿展望

## 2 参考资料

1. Ben-Tal, A., El Ghaoui, L. & Nemirovski, A. *Robust Optimization*. Princeton University Press, 2009.
2. Bertsimas, D., Brown, D.B. & Caramanis, C. "Theory and Applications of Robust Optimization." *SIAM Review*, 53(3):464–501, 2011.
3. Ben-Tal, A. & Nemirovski, A. "Robust Solutions of Linear Programming Problems Contaminated with Uncertain Data." *Mathematical Programming*, 88:411–424, 2000.
4. Bertsimas, D. & Sim, M. "The Price of Robustness." *Operations Research*, 52(1):35–53, 2004.
5. Rahimian, H. & Mehrotra, S. "Frameworks and Results in Distributionally Robust Optimization." *Open Journal of Mathematical Optimization*, 3:4, 2022.
6. Kuhn, D., Esfahani, P.M. & Nguyen, V.A. "Wasserstein Distributionally Robust Optimization: Theory and Applications in Machine Learning." *Operations Research*, 72(3), 2024.
7. Delage, E. & Ye, Y. "Distributionally Robust Optimization Under Moment Uncertainty with Application to Data-Driven Problems." *Operations Research*, 58(3):595–612, 2010.
8. Wiesemann, W., Kuhn, D. & Sim, M. "Distributionally Robust Convex Optimization." *Operations Research*, 62(6):1358–1376, 2014.
9. Shapiro, A. "Distributionally Robust Stochastic Programming." *SIAM Journal on Optimization*, 27(4):2258–2275, 2017.
10. Soyster, A.L. "Convex Programming with Set-Inclusive Constraints and Applications to Inexact Linear Programming." *Operations Research*, 21(5):1154–1157, 1973.