

# 概率论与数理统计

测度论基础、推断理论与高维统计

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

## 课程简介

本课程系统建立概率论与数理统计的严格数学框架，以测度论为基础，涵盖从  $\sigma$ -代数与 Lebesgue 积分的现代分析工具，到大样本理论、参数推断、假设检验与非参数方法的完整推断体系，最终延伸至高维统计的前沿结果。课程强调严格的数学推导与完整证明，要求学生具备从第一性原理出发理解每一结论的能力。通过 Radon-Nikodym 定理、特征函数方法、鞅论基础、信息不等式（Cramér-Rao 下界）、Neyman-Pearson 引理以及 Bootstrap 一致性定理等核心内容，帮助学生建立深厚的概率统计理论素养，为机器学习、随机优化、数理金融及统计学习理论等领域的研究奠定坚实基础。

## 适合人群

- 统计学、应用数学、计算机科学、运筹学等方向的博士生及高年级硕士生
- 希望从测度论角度严格掌握概率基础的机器学习、数据科学研究人员
- 对统计推断理论、大样本理论和高维统计感兴趣的交叉学科研究者
- 已修读本科级概率统计，寻求理论深化与严格化的学习者

## 前置知识

- **实分析**：极限、连续性、Riemann 积分、一致收敛、度量空间基础
- **线性代数**：矩阵运算、特征值分解、正定矩阵、行列式
- **微积分**：多元微积分、偏导数、重积分、换元公式
- **本科概率论**（有益但非必须）：基本概念将在第 1-2 讲从测度论角度重建

## 1 课程大纲

讲次	主题	内容概要
1	测度论基础	$\sigma$ -代数、Borel 集、测度空间、Lebesgue 积分（单调收敛定理、Fatou 引理、控制收敛定理的完整证明）、 $L^p$ 空间、Fubini-Tonelli 定理
2	随机变量与分布	可测函数、随机变量与随机向量、分布函数、特征函数（唯一性定理、反演公式）、矩母函数、分布族（指数族、位置-尺度族）

讲次	主题	内容概要
3	期望与条件期望	Lebesgue 积分视角下的期望、Radon-Nikodym 定理（完整证明）、条件期望的测度论定义、塔性质与光滑性、鞅基础（停时、可选停时定理）
4	大数定律与中心极限定理	弱 LLN (Chebyshev)、强 LLN (Borel-Cantelli 引理 + Kolmogorov 完整证明)、经典 CLT (特征函数方法完整推导)、Berry-Esseen 误差界、Lindeberg 条件推广
5	收敛理论	四种收敛模式 (a.s.、 $L^p$ 、依概率、依分布) 及其关系图 (含反例)、Skorokhod 表示定理、紧性 (Prohorov 定理)、连续映射定理、Delta 方法
6	参数估计：充分性与完备性	充分统计量 (Fisher-Neyman 因子化定理)、完备充分统计量、Rao-Blackwell 定理 (完整证明)、指数族的完备充分性 (Lehmann-Scheffé 定理)
7	最大似然估计	MLE 的一致性 (完整证明: 可识别性 + LLN + Wald 方法)、渐近正态性 (Fisher 信息矩阵 + Delta 方法)、Cramér-Rao 下界 (完整推导)、有效估计量、贝叶斯估计基础
8	假设检验	Neyman-Pearson 基本引理 (完整证明)、最优势检验 (UMP)、似然比检验 (Wilks 定理)、Wald 检验、得分检验、多重比较 (Bonferroni/Holm)
9	区间估计与 Bootstrap	枢轴量法、精确置信区间 (正态/ $t$ /卡方/ $F$ )、大样本 Wald 置信区间、Bootstrap 原理 (Efron 1979)、Bootstrap 一致性定理 (Bickel-Freedman)、BCa 校正区间
10	非参数统计	经验分布函数与 Glivenko-Cantelli 定理 (完整证明)、Kolmogorov-Smirnov 统计量与渐近分布、秩检验 (Wilcoxon/Mann-Whitney 统计量的渐近分布)、核密度估计 (最优带宽、MSE 分析)
11	多元统计	多元正态分布 (定义、性质、Cochran 定理)、Wishart 分布、霍特林 $T^2$ 检验、Fisher 线性判别分析 (LDA 推导)、主成分分析 (PCA 的谱分解与最优性证明)
12	高维统计与渐近理论	Marchenko-Pastur 定律 (随机矩阵入门)、高维回归的挑战、Lasso 稀疏恢复理论 (RIP 条件与误差界)、随机投影 (Johnson-Lindenstrauss 引理)、高维统计的信息论下界

## 2 参考书目

---

1. Patrick Billingsley, *Probability and Measure*, 3rd ed., Wiley, 1995. (测度论概率的权威教材)
2. Rick Durrett, *Probability: Theory and Examples*, 5th ed., Cambridge University Press, 2019. (现代研究生概率论主流教材)
3. Erich L. Lehmann and George Casella, *Theory of Point Estimation*, 2nd ed., Springer, 1998. (参数估计理论经典)
4. Erich L. Lehmann and Joseph P. Romano, *Testing Statistical Hypotheses*, 3rd ed., Springer, 2005. (假设检验理论权威著作)
5. Peter J. Bickel and Kjell A. Doksum, *Mathematical Statistics: Basic Ideas and Selected Topics*, Vol. 1&2, Pearson, 2015. (数理统计标准教材)
6. Jun Shao, *Mathematical Statistics*, 2nd ed., Springer, 2003. (严格的数理统计研究生教材)
7. Alexandre B. Tsybakov, *Introduction to Nonparametric Estimation*, Springer, 2009. (非参数统计的现代处理)
8. Roman Vershynin, *High-Dimensional Probability*, Cambridge University Press, 2018. (高维概率的现代入门)
9. Martin J. Wainwright, *High-Dimensional Statistics: A Non-Asymptotic Viewpoint*, Cambridge University Press, 2019. (高维统计的权威现代教材)
10. A.W. van der Vaart, *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press, 1998. (渐近统计理论的全局处理)