

最优控制

变分法、极大值原理与现代控制理论

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

课程简介

最优控制 (Optimal Control) 是现代控制理论与应用数学的核心交叉领域, 研究如何在动态系统约束下使给定性能指标达到最优。从航空航天轨迹规划、机器人运动控制, 到经济政策的最优增长模型, 最优控制理论为这些看似迥异的问题提供了统一的数学框架与计算工具。本课程以博士研究生为培养对象, 系统讲授最优控制的理论基础与前沿方法。课程从经典变分法出发, 建立泛函极值的数学框架, 推导 Euler-Lagrange 方程并分析 brachistochrone 等经典问题。随后进入连续时间最优控制的一般理论, 严格推导 Pontryagin 极大值原理 (PMP) ——这是最优控制理论的核心定理——并给出完整的证明, 覆盖 Hamilton 函数、伴随方程与横截条件。

在 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程部分, 课程从动态规划原理 (DPP) 严格推导 HJB 方程, 建立验证定理, 并引入粘性解理论处理方程不可微的情形。线性二次调节器 (LQR) 和线性二次高斯 (LQG) 控制作为最优控制最重要的解析可解特例, 将获得深入的代数 Riccati 方程分析与稳定性证明。数值方法部分系统比较直接法 (配点法、多重打靶) 与间接法 (共轭梯度、打靶法) 的理论基础与实现细节。

高级专题涵盖: 模型预测控制 (MPC) 的滚动时域思想及稳定性分析、鲁棒最优控制中的 H_∞ 问题与 min-max 框架、随机最优控制的 Ito 引理与随机 HJB 方程、分布式与多智能体最优控制中的耦合 Riccati 方程与共识协议, 最终以强化学习与最优控制的桥梁、数据驱动控制的最新进展作结。

本课程强调数学严格性: 所有核心定理 (特别是 Pontryagin 极大值原理) 给出完整证明, 算法分析包含收敛性与复杂度论证, 每讲包含精心设计的例题与习题以强化理解。

适合人群

- 控制科学与工程、应用数学、航空航天、机械工程等专业的博士研究生
- 对最优控制理论有深入研究需求的硕士研究生
- 从事强化学习、机器人控制、自动驾驶、轨迹优化方向的研究人员
- 希望系统掌握最优控制理论基础与前沿方法的工程师与数据科学家

前置知识

- **线性代数 (Linear Algebra):** 矩阵运算、特征值理论、矩阵指数函数、Jordan 标准形
- **常微分方程 (ODEs):** 线性/非线性 ODE 的存在唯一性、稳定性分析、Gronwall 不等式
- **实分析 (Real Analysis):** 多元函数微分、Lebesgue 积分、函数空间基础
- **泛函分析基础:** Banach 空间、线性算子、Frechet 导数 (推荐了解)
- **概率论:** 随机过程基础、Ito 积分基础 (第 10 讲随机控制需要)
- **编程能力:** Python/MATLAB/Julia, 用于数值实验与控制仿真

讲次	主题	内容概要
第 1 讲	引论与变分法基础	泛函极值问题、函数空间与 Frechet 导数、Euler-Lagrange 方程的推导与证明、自然边界条件、等周问题 (Lagrange 乘法)、brachistochrone 问题 (最速降线)、测地线、Legendre-Clebsch 条件 (二阶必要条件)、变分法的历史与应用
第 2 讲	连续时间最优控制	Bolza 问题的完整表述、Lagrange 与 Mayer 形式的等价性、状态方程与可达集、最优值函数 (值函数) 的引入、必要条件推导的几何动机、受控微分方程的解的存在性 (Carathéodory 条件)、最优控制的存在性定理 (Filippov)
第 3 讲	Pontryagin 极大值原理 (PMP)	PMP 的完整陈述与证明 (Ekeland 变分原理方法)、Hamilton 函数的定义与性质、伴随方程 (协态方程)、终端约束与横截条件、时间最优控制与 bang-bang 原理、奇异控制与奇异弧、PMP 在各类问题中的应用
第 4 讲	Hamilton-Jacobi-Bellman 方程	动态规划原理 (DPP) 的严格推导、HJB 方程的推导与边界条件、验证定理 (Verification Theorem) 及完整证明、粘性解 (Viscosity Solution) 理论、HJB 方程的唯一性与比较原理、时不变系统的无穷时域 HJB、HJB 与 PMP 的关系
第 5 讲	线性二次调节器 (LQR)	有限时域 LQR 问题、代数 Riccati 方程 (ARE) 的推导、矩阵 Riccati 微分方程的解的存在性与唯一性、无穷时域 LQR 与代数 Riccati 方程、最优反馈增益的显式公式、闭环稳定性分析 (Lyapunov 方法)、LQR 的频域解释与鲁棒性边界
第 6 讲	线性二次高斯 (LQG)	状态估计与 Kalman 滤波器的推导、Riccati 方程的对偶性、分离定理 (Separation Principle) 的严格证明、LQG 控制器的完整设计、随机 HJB 与随机最优性条件、LQG 的鲁棒性分析 (LQG 稳定性边界可能很小)、鲁棒控制的动机
第 7 讲	数值方法	直接法 (Direct Methods): 配点法 (Gauss/Radau 伪谱法)、多重打靶法、直接转录的非线性规划公式; 间接法 (Indirect Methods): 单一打靶法、两点边值问题的数值求解 (BVP4c/shooting)、共轭梯度法在最优控制中的应用; 收敛性分析与精度比较

讲次	主题	内容概要
第 8 讲	模型预测控制 (MPC)	MPC 的滚动时域 (RHC) 框架与在线优化、MPC 的递推可行性分析、终端约束与终端代价的稳定性保证 (Mayne 定理)、无终端约束 MPC 的稳定性 (收缩约束)、约束处理与软约束、经济 MPC (EMPC)、MPC 的计算复杂度与实时实现
第 9 讲	鲁棒最优控制	不确定性建模 (参数不确定性、未建模动态)、 H_∞ 控制问题的 min-max 表述、小增益定理、 H_∞ Riccati 方程与 ARE 方法、有界实引理、 μ 综合简介、鲁棒 MPC 的管道 (tube) 方法、不确定性量化 (UQ) 在控制中的应用
第 10 讲	随机最优控制	Ito 引理与随机微分方程基础、随机过程的最优控制问题、随机 HJB (SHJB) 方程的推导、随机 Pontryagin 最大值原理 (SPMP)、线性二次高斯 (LQG) 从随机角度的重新推导、风险敏感控制与鲁棒性联系、路径积分控制 (PI 控制)
第 11 讲	分布式与多智能体最优控制	多智能体系统的耦合动态、分布式 LQR 与耦合代数 Riccati 方程、共识协议 (consensus protocols) 与图拉普拉斯、分布式 MPC 与一致性优化 (ADMM 方法)、博弈论框架下的多智能体最优控制 (Nash 均衡)、大规模系统的可扩展性分析
第 12 讲	前沿专题: 强化学习与数据驱动控制	最优控制与强化学习 (RL) 的数学桥梁 (Bellman 方程、策略梯度)、自适应动态规划 (ADP) 与近似动态规划 (ADP)、基于模型的强化学习 (Model-Based RL)、数据驱动最优控制 (Koopman 算子、SINDy)、安全约束强化学习 (Control Barrier Functions)、研究前沿与开放问题

参考文献

- [1] Pontryagin, L. S., Boltyanskii, V. G., Gamkrelidze, R. V. & Mishchenko, E. F. (1962). *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Wiley-Interscience. ——极大值原理的奠基之作, Pontryagin 等人的经典著作, 最优控制理论的起点。
- [2] Kirk, D. E. (2004). *Optimal Control Theory: An Introduction*. Dover Publications. ——最优控制的经典入门教材, 变分法与 PMP 讲解清晰, 适合系统学习。
- [3] Lewis, F. L., Vrabie, D. & Syrmos, V. L. (2012). *Optimal Control*, 3rd Edition. John Wiley & Sons. ——LQR/LQG 与现代控制理论的系统介绍, 工程视角清晰, 覆盖自适应动态规划。

- [4] Fleming, W. H. & Soner, H. M. (2006). *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*, 2nd Edition. Springer. ——随机最优控制与粘性解理论的权威参考，数学严格性极高。
- [5] Liberzon, D. (2011). *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. Princeton University Press. ——变分法到 PMP 的简明推导，数学严谨，适合研究生阶段系统学习。
- [6] Brockett, R. W. (1970). *Finite Dimensional Linear Systems*. John Wiley & Sons. ——线性系统理论的经典文献，LQR/LQG 理论基础。
- [7] Mayne, D. Q., Rawlings, J. B., Rao, C. V. & Scokaert, P. O. M. (2000). Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, 36(6), 789–814. ——MPC 理论的奠基性综述，稳定性分析的核心参考。
- [8] Zhou, K., Doyle, J. C. & Glover, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall. —— H_∞ 控制与鲁棒控制的经典教材，Riccati 方程方法的完整介绍。
- [9] Bryson, A. E. & Ho, Y. C. (1975). *Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control*. Taylor & Francis. ——应用最优控制的经典教材，工程应用丰富，变分法与 PMP 并重。
- [10] Bertsekas, D. P. (2019). *Reinforcement Learning and Optimal Control*. Athena Scientific. ——将强化学习与最优控制统一在动态规划框架下，近年最重要的著作之一。
- [11] Sontag, E. D. (1998). *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*, 2nd Edition. Springer. ——控制理论的数学严格介绍，可控性与可观性理论完整。
- [12] Anderson, B. D. O. & Moore, J. B. (1990). *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall. ——LQR/LQG 的深入分析，频域解释与鲁棒性边界的重要参考。
- [13] Rawlings, J. B., Mayne, D. Q. & Diehl, M. M. (2017). *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*, 2nd Edition. Nob Hill Publishing. ——MPC 理论与计算的现代权威教材，涵盖稳定性证明与实时实现。
- [14] Øksendal, B. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 6th Edition. Springer. ——随机微分方程的标准教材，Ito 引理与随机控制的数学基础。