运筹学

建模、算法与决策——理论基础与前沿方法

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

课程简介

运筹学 (Operations Research, OR) 是利用数学建模、统计分析与优化算法，为复杂决策问题提供系统化、定量化解决方案的学科。本课程以**严格的数学理论**为基础，涵盖**线性规划**（单纯形法、内点法、对偶理论）、**整数规划**（分支定界、割平面、多面体理论）、**非线性规划**（KKT 条件、凸规划、SQP 方法）、**动态规划**（最优性原理、近似动态规划）、**排队论**（生灭过程、排队网络）、**博弈论**（Nash 均衡、机制设计）以及**多目标优化**（Pareto 最优、进化多目标方法）等核心分支。

课程强调**完整的数学证明**（含存在性、唯一性、收敛性与复杂度分析），注重**建模思维**与**算法实现**的结合，辅以经典工业案例与前沿学术文献，帮助学生建立从" 问题描述" 到" 数学模型" 再到" 最优决策" 的完整能力链。课程达到研究型大学博士资格考试水平，为后续从事运筹与优化方向的学术研究或高端工业应用奠定坚实基础。

适合人群

- 管理科学与工程、工业工程、系统工程等方向的博士研究生
- 应用数学、计算机科学、统计学方向希望系统掌握优化理论的研究生
- 从事供应链管理、生产调度、收益管理、算法交易等领域的高级工程师与研究员
- 准备运筹学博士资格考试 (Qualifying Exam) 或综合考试的学生

前置知识

- 线性代数：矩阵分解（LU、QR、SVD）、特征值理论、向量空间与对偶空间
- 实分析/高等数学：多元函数微分、隐函数定理、紧致性与连续性、测度论基础
- 凸分析基础：凸集、凸函数、次梯度、分离定理（推荐但非必须）
- 概率论与随机过程：条件期望、Markov 链、Poisson 过程（排队论与博弈论需要）
- 算法与复杂性理论基础：O-记号、$\mathcal{P}$ 与 $\mathcal{NP}$ 概念
- 编程能力：Python（Gurobi/CPLEX/SciPy）或 MATLAB/Julia，用于数值实验

1 课程内容

讲次	主题	内容概要
1	运筹学导论	运筹学的公理化框架与方法论；数学建模的一般过程与验证；优化问题分类（连续/离散/随机/多目标）；线性规划的引入；可行域的多面体结构；LP 基本定理的证明；复杂性理论初步（$\mathcal{P}/\mathcal{NP}$/多项式可解性）
2	线性规划与单纯形法	标准形式与基本可行解 (BFS)；单纯形法的代数原理与矩阵表述；最优性条件 (reduced cost)；退化与 Bland 规则；修正单纯形法 (Revised Simplex) 与 LU 更新；大 M 法与两阶段法的理论基础；单纯形法的指数最坏复杂度 (Klee-Minty)
3	对偶理论与灵敏度分析	对偶问题的系统构造；弱对偶定理证明；强对偶定理（Farkas 引理途径）；互补松弛条件及其算法应用；对偶单纯形法；影子价格的经济学解释；灵敏度分析与参数规划；对偶理论在博弈论与组合优化中的应用
4	运输问题与网络优化	运输问题的数学建模与表上作业法；退化处理；指派问题与匈牙利算法 (Kuhn-Munkres)；最短路算法 (Dijkstra, Bellman-Ford, Floyd-Warshall)；最大流-最小割定理与 Ford-Fulkerson 算法；最小费用流与网络单纯形法；图论中的多面体结构
5	整数规划	整数规划的建模技巧（逻辑约束、分段线性、集合覆盖）；LP 松弛与整数性间隙；分支定界法及其复杂度分析；Gomory 割平面法与多面体理论；混合整数规划 (MIP)；Lagrangian 松弛与对偶界；TSP/VRP 等经典问题建模
6	非线性规划基础	无约束优化：梯度法、Newton 法、拟 Newton 法；KKT 条件的严格推导（Farkas 引理途径）；约束规格 (LICQ/MFCQ/Slater)；二阶充分条件；凸规划的全局最优性；二次规划 (QP) 与序列二次规划 (SQP)；内点法在非线性规划中的应用
7	动态规划	Bellman 最优性原理的严格证明；确定性动态规划：最短路、资源分配、背包问题；随机动态规划与 Markov 决策过程 (MDP)；值迭代与策略迭代的收敛性证明；维数灾难与近似动态规划 (ADP)；强化学习联系

讲次	主题	内容概要
8	排队论	Poisson 过程与指数分布的无记忆性；生灭过程与平衡方程；M/M/1, M/M/c, M/M/c/K 模型推导；Little 公式的严格证明 (H. Little 1961)；M/G/1 模型与 Pollaczek-Khinchine 公式；排队网络：Jackson 网络与乘积形式解；排队系统的优化与设计
9	博弈论基础	标准形博弈与扩展形博弈；零和博弈与极小极大定理 (von Neumann)；Nash 均衡的定义与存在性证明 (Kakutani/Brouwer)；混合策略与支撑引理；博弈论与线性规划的对偶联系；重复博弈与 Folk 定理；机制设计初步（VCG 机制）
10	多目标优化与综合决策	Pareto 最优与非劣解集的数学刻画；加权和法的完备性条件与 ϵ-约束法；多目标线性规划的参数化方法；进化多目标算法 (NSGA-II, MOEA/D) 原理；层次分析法 (AHP) 与一致性检验；多准则决策综合案例；运筹学前沿与交叉方向

2 参考资料

1. Hillier, F.S. & Lieberman, G.J. *Introduction to Operations Research*. 11th ed. McGraw-Hill, 2021.
2. Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J.N. *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific, 1997.
3. Nemhauser, G.L. & Wolsey, L.A. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley, 1988.
4. Bazaraa, M.S., Sherali, H.D. & Shetty, C.M. *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. 3rd ed. Wiley, 2006.
5. Bertsekas, D.P. *Dynamic Programming and Optimal Control*. 4th ed. Athena Scientific, 2017.
6. Gross, D. et al. *Fundamentals of Queueing Theory*. 5th ed. Wiley, 2018.
7. Osborne, M.J. & Rubinstein, A. *A Course in Game Theory*. MIT Press, 1994.
8. Ehrgott, M. *Multicriteria Optimization*. 2nd ed. Springer, 2005.
9. Wolsey, L.A. *Integer Programming*. 2nd ed. Wiley, 2021.
10. 胡富强等. *运筹学教程*. 第 5 版. 清华大学出版社, 2018.