

非线性优化

理论、算法与应用

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

课程简介

本课程系统讲授非线性优化（Nonlinear Optimization / Nonlinear Programming）的核心理论与现代算法。课程从无约束优化的最优性条件出发，深入分析线搜索方法、梯度法、Newton 法、拟 Newton 法、信赖域方法的收敛性质与复杂度；随后转入约束优化，覆盖 KKT 理论、罚函数法、增广 Lagrangian 法、序列二次规划（SQP）以及非线性内点法；最后以全局优化与非凸方法作为收尾，讨论凸松弛、分支定界及随机方法。课程强调理论推导的完整性（所有核心定理均给出严格证明）、算法收敛率的精确刻画（局部/全局、线性/超线性/二次）、以及与机器学习、工程设计、控制、运筹学等领域的深度融合。本课程面向博士研究生及有志于深入非线性优化理论与算法研究的高年级学生。

适合人群

- 应用数学、运筹学、计算机科学、统计学等专业的博士/硕士研究生
- 从事机器学习、深度学习优化算法研究的研究人员
- 从事工程优化、最优控制、信号处理的工程师与研究者
- 对非线性规划的理论基础与算法设计感兴趣的高年级本科生
- 有志于开发优化求解器的算法工程师

前置知识

- 线性代数：矩阵分解（LU、Cholesky、QR、SVD）、特征值分析、正定矩阵、谱理论
- 多元微积分：梯度、Jacobian、Hessian 矩阵、Taylor 展开、隐函数定理、Lipschitz 连续性
- 实分析基础：度量空间、紧性、收敛性、不动点定理
- 凸优化基础：凸集与凸函数、对偶理论、KKT 条件（建议先修或同步学习）
- 数值分析：收敛阶（线性、超线性、二次）、数值线性代数、条件数
- 线性规划：单纯形法、对偶理论、内点法基础（了解即可）

1 课程内容

讲次	主题	内容概要
1	非线性优化导论	优化问题分类与标准形式、凸优化与非凸优化的本质差异、复杂度层级（P/NP/#P）、算法收敛性概念（全局/局部收敛，线性/超线性/二次收敛）、非线性优化在机器学习/控制/工程中的应用全景

讲次	主题	内容概要
2	无约束最优性条件	一阶必要条件 ($\nabla f(x^*) = 0$)、二阶必要与充分条件、正定性与局部曲率、凸函数的最优性条件(充要性)、Weierstrass 存在性定理、强制性 (coercivity) 条件
3	线搜索方法	精确线搜索与 Goldstein/Wolfe/强 Wolfe 条件、Armijo 回溯、Zoutendijk 全局收敛定理与充分下降方向、线搜索方法的统一收敛框架、步长选取策略的比较
4	梯度法与共轭梯度法	最速下降法及条件数依赖的收敛率分析、共轭方向法与二次终止性、Fletcher-Reeves/Polak-Ribière/Hestenes-Stiefel 公式、非线性共轭梯度法的全局收敛性、预条件与重启策略
5	Newton 法与拟 Newton 法	Newton 法的局部二次收敛证明、阻尼 Newton 法、修正 Newton 法 (正则化/修正 Cholesky)、BFGS 更新与超线性收敛 (Dennis-Moré 定理)、L-BFGS 的有限内存实现、SR1 更新与无条件继承正定性
6	信赖域方法	信赖域框架与全局收敛性证明、Cauchy 点与 dog-leg 方法、截断共轭梯度法 (Steihaug-Toint CG) 求解子问题、信赖域半径更新策略、信赖域方法与线搜索方法的比较、子问题的精确求解 (Moré-Sorensen 算法)
7	约束优化: 罚函数法与增广 Lagrangian 法	外点二次罚函数法及其收敛性与病态性、精确罚函数 (l_1 罚) 与 Clarke 不可微性、对数障碍法 (内点罚函数)、增广 Lagrangian 法 (ALM/方法 of multipliers) 及其收敛分析、ADMM 与 ALM 的关系
8	约束优化: 序列二次规划 (SQP)	SQP 方法的推导 (Newton 法应用于 KKT 系统)、QP 子问题的构造与求解、BFGS-SQP (拟 Newton Hessian 近似)、Maratos 效应与二阶校正、线搜索 SQP 与信赖域 SQP、约束优化的超线性收敛理论
9	非线性内点法	原始-对偶内点法的 KKT 扰动推导、对数障碍函数与中心路径、障碍参数更新策略、Mehrotra 预测-校正方法、不等式约束的内点法实现、与 SQP 的比较及各自适用场景

讲次	主题	内容概要
10	全局优化与非凸方法	非凸问题的凸松弛 (LP/SDP 松弛)、分支定界法框架、多起点策略与 basin hopping、凸-凹过程 (DC 规划)、随机梯度法与非凸收敛理论、逃离鞍点 (扰动 SGD/cubic 正则化)、深度学习中的非凸优化前沿

2 参考书目

1. J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2nd ed., Springer, 2006. (主要教材, 覆盖全部算法)
2. D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 3rd ed., Athena Scientific, 2016. (理论深入, 约束优化部分尤佳)
3. S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004. (凸优化基础参考)
4. A. R. Conn, N. I. M. Gould, and Ph. L. Toint, *Trust-Region Methods*, SIAM, 2000. (信赖域方法权威著作)
5. Y. Nesterov, *Lectures on Convex Optimization*, 2nd ed., Springer, 2018. (复杂度与加速方法理论)
6. J. E. Dennis and R. B. Schnabel, *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Non-linear Equations*, SIAM, 1996. (无约束优化经典)
7. P. T. Boggs and J. W. Tolle, "Sequential quadratic programming," *Acta Numerica*, 4:1–51, 1995. (SQP 综述)
8. 袁亚湘, 孙文瑜, 最优化理论与方法, 科学出版社, 1997. (中文经典教材)
9. R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, 2nd ed., Wiley, 2000. (算法实现导向)
10. A. S. Lewis and S. J. Wright, "A proximal method for composite minimization," *Mathematical Programming*, 158:501–546, 2016. (近端方法理论)