

线性规划

理论、算法与前沿方法

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

课程简介

线性规划 (Linear Programming, LP) 是运筹学与最优化理论的核心分支,也是现代数据科学、机器学习、经济学和工程优化的重要数学工具。本课程以 Robert J. Vanderbei 所著 *Linear Programming: Foundations and Extensions* (第五版) 为主要教材,辅以 Bertsimas & Tsitsiklis 的 *Introduction to Linear Optimization* 和 Schrijver 的 *Theory of Linear and Integer Programming*, 系统讲授线性规划的基本理论、经典算法和前沿方法。

课程从线性规划的标准形式与几何直觉出发,深入讨论单纯形法 (Simplex Method) 的代数结构与实现细节,建立完整的对偶理论 (Duality Theory) 框架,包括 Farkas 引理的多种证明、对偶单纯形法及互补松弛条件的深层含义。在灵敏度分析部分,课程系统讨论参数线性规划与最优值函数的分段线性凸性。

在算法层面,课程涵盖内点法 (Interior Point Methods) 的两大范式——仿射缩放法与路径跟踪法,深入分析中心路径、自协调障碍函数理论及多项式复杂度证明。网络优化部分讨论网络单纯形法的树结构实现及全幺模性的理论基础。课程后半部分引入整数规划 (Integer Programming) 的基本理论,涵盖分支定界法、Gomory 割平面法及分支切割法的现代实现,最终通过列生成、Dantzig-Wolfe 分解和 Benders 分解等高级技术展示线性规划在大规模优化中的建模与求解能力。

本课程面向博士研究生,强调数学严格性:所有核心定理给出完整证明,算法分析包含复杂度与收敛性论证,应用案例注重建模技巧与计算实践。通过本课程的学习,学生将掌握线性规划从理论到算法再到应用的完整技术链条,为从事优化理论研究或解决实际大规模优化问题奠定坚实基础。

适合人群

应用数学、运筹学、统计学、计算机科学等专业的博士研究生

对最优化理论和算法有深入研究需求的硕士研究生

从事数学规划、算法设计、机器学习优化方向的研究人员

希望系统掌握线性规划理论基础与前沿方法的数据科学高级从业者

前置知识

线性代数 (Linear Algebra): 矩阵运算、行列式、向量空间、线性方程组、特征值与特征向量、正定矩阵、矩阵分解 (LU、Cholesky)

高等数学 / 实分析 (Real Analysis): 多元函数微分、梯度、Hessian 矩阵、隐函数定理、紧集上连续函数的性质

凸分析基础 (Convex Analysis): 凸集、凸函数、分离超平面定理 (有助于深入理解对偶理论)

数值计算 (Numerical Methods): 浮点运算、数值线性代数基础、稀疏矩阵技术 (有助于理解算法实现)

编程能力: Python 或 MATLAB/Julia (用于数值实验与算法实现)

讲次 主题

内容概要

第 1 讲线性规划导论与几何直观 LP 的标准形式与等价转换、可行域与多面体理论、超平面与半空间、凸集与凸包

参考文献

- [1] Vanderbei, R. J. (2020). *Linear Programming: Foundations and Extensions*, 5th Edition. Springer. ——本课程主要教材, 覆盖从基础理论到内点法的完整内容。
- [2] Bertsimas, D. & Tsitsiklis, J. N. (1997). *Introduction to Linear Optimization*. Athena Scientific. ——经典教材, 理论严谨、证明完整, MIT 博士课程标准教材。
- [3] Schrijver, A. (1998). *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons. ——理论深度极高, 多面体理论与整数规划的权威参考。
- [4] Chvátal, V. (1983). *Linear Programming*. W. H. Freeman. ——深入浅出, 几何直觉丰富, Chvátal-Gomory 割平面法的来源。
- [5] Dantzig, G. B. & Thapa, M. N. (1997, 2003). *Linear Programming 1: Introduction; 2: Theory and Extensions*. Springer. ——线性规划创始人 Dantzig 的权威著作, 两卷本。
- [6] Nesterov, Y. & Nemirovskii, A. (1994). *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Optimization*. SIAM. ——内点法的理论奠基之作, 自协调障碍函数理论的来源。
- [7] Wright, S. J. (1997). *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM. ——原始-对偶内点法的系统介绍, 兼顾理论与实现。
- [8] Wolsey, L. A. (1998). *Integer Programming*. John Wiley & Sons. ——整数规划的经典教材, 涵盖分支定界与切割平面法。
- [9] Conforti, M., Cornuéjols, G. & Zambelli, G. (2014). *Integer Programming*. Springer. ——现代整数规划教材, 涵盖多面体理论与分支切割法。
- [10] Ben-Tal, A., El Ghaoui, L. & Nemirovski, A. (2009). *Robust Optimization*. Princeton University Press. ——鲁棒优化的系统介绍, 展示 LP 在不确定性建模中的应用。
- [11] Luenberger, D. G. & Ye, Y. (2016). *Linear and Nonlinear Programming*, 4th Edition. Springer. ——线性与非线性规划的综合教材, 适合对比学习。
- [12] Karmarkar, N. (1984). A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4), 373–395. ——内点法的开创性论文, 证明 LP 可在多项式时间内求解。

- [13] Khachiyan, L. G. (1979). A polynomial algorithm in linear programming. *Soviet Mathematics Doklady*, 20, 191–194. ——椭球法论文，首次证明 LP 属于 P 类问题。
- [14] Dantzig, G. B. (1951). Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities. In *Activity Analysis of Production and Allocation*, pp. 339–347. Wiley. ——单纯形法的原始论文。