整数规划

多面体理论、精确算法与现代求解技术 • 博士进阶课程

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

课程简介

整数规划 (Integer Programming, IP) 是运筹学与组合优化的核心分支，研究决策变量受整数约束时的优化问题。本课程从建模技巧出发，深入多面体理论与有效不等式，系统讲解分支定界、割平面、分支切割等经典求解框架，并扩展至拉格朗日松弛、列生成、分支定价及近似算法等进阶方法。课程强调理论推导与计算实践的紧密结合：多面体视角贯穿始终，从面的刻画到凸包描述，从 Chvátal–Gomory 过程到 Lift-and-Project 层级，建立从建模质量到求解效率的完整理论链条。全部 12 讲以博士水平呈现，帮助学生掌握整数规划的数学本质并理解现代 MIP 求解器的核心技术。

适合人群

- 已掌握线性规划理论（单纯形法、对偶理论、灵敏度分析），希望深入学习整数规划理论与算法的博士生/研究者
- 从事供应链优化、调度排程、网络设计等方向，需要高级建模与求解能力的运筹学从业者
- 对组合优化、多面体理论与计算复杂性感兴趣的数学/计算机专业学生
- 希望理解现代 MIP 求解器（Gurobi, CPLEX, SCIP）内部机制的开发者

前置知识

- 线性规划：标准形式、单纯形法（修正单纯形法）、对偶理论（强对偶、互补松弛）、灵敏度分析
- 线性代数：矩阵运算、线性方程组、秩与基、特征值基础
- 凸分析基础：凸集、凸组合、极点、多面体、支撑超平面
- 基本的图论概念（图、树、匹配、路径）有帮助
- 计算复杂性基础（P, NP, NP-hard 概念）有帮助但非必须

1 课程内容

讲次	主题	内容概要
1	整数规划导论	整数规划的定义与分类（IP/MIP/BIP）；与 LP 的本质区别（几何对比）；经典问题概览（背包、指派、TSP、设施选址）；计算复杂性（NP-hard, Karp 21 问）；LP 松弛与整数间隙；现代 MIP 求解器概况与性能演化

讲次	主题	内容概要
2	建模技巧（一）：逻辑与线性化	0-1 变量表达逻辑关系（合取、析取、蕴含）；Big-M 方法与 Big-M 的选择；固定费用问题；Either-Or 约束；If-Then 建模；指示变量技巧；分段线性函数建模（SOS2）；建模等价性与建模强度
3	建模技巧（二）：经典模型	集合覆盖/装填/划分问题；设施选址（有容量/无容量）；旅行商 (TSP) 与子回路消除（DFJ vs MTZ）；车辆路径问题 (VRP)；网络设计与 Steiner 树；排程问题；对称性破缺
4	LP 松弛与建模质量	松弛的一般概念（LP、Lagrangian、SDP）；LP 松弛与整数间隙；全幺模矩阵（TU）：定义、判定（Ghouila-Houri）、经典例子；网络矩阵与 TU 的充分条件；强弱建模的比较；理想建模与整数多面体
5	多面体理论基础	多面体与多胞体；仿射无关与维数定理；面与面格；有效不等式与面的刻画定理；极点、极射线与 Minkowski 表示；投影与 Fourier-Motzkin 消去；建模的多面体视角
6	分支定界法（一）	枚举与隐式枚举；分支定界框架（分支、定界、剪枝）；分支策略（最不可行、强分支、可靠分支、混合分支）；搜索树的几何解释；正确性证明与有限终止性
7	分支定界法（二）	节点选择策略（DFS/BFS/Best-first/混合策略）；预处理与探测（变量固定、蕴含、约束传播、clique 检测）；缩减费用固定；启发式（RINS, 可行性泵, diving）；分支定界的计算实践与性能调优
8	割平面法（一）：Gomory 割	有效不等式与割平面的几何意义；Gomory 分数割的推导与正确性证明；Chvátal–Gomory (CG) 过程；CG 闭包与 CG 秩；纯割平面算法（Gomory 算法）与有限收敛性
9	割平面法（二）：组合割与结构化割	背包覆盖不等式与提升（sequence-independent lifting）；混合整数舍入 (MIR) 不等式；分裂割（split cuts）与 split 闭包；Lift-and-Project（Balas-Ceria-Cornuéjols）；割的层级（CG, split, L&P）与 IP/LP 间隙的关系

讲次	主题	内容概要
10	分支切割法	分支切割框架（Branch-and-Cut）；割的管理（选择、老化、清理）；现代 MIP 求解器结构概述（预处理 $\to$ 根节点 $\to$ 搜索树）；计算性能的关键因素；对偶退化与对策；对称性处理（isomorphism pruning, orbital fixing）
11	拉格朗日松弛与 Benders 分解	拉格朗日松弛的构造与几何解释；拉格朗日对偶与弱/强对偶；与 LP 松弛的关系（$z_{LR} = z_{LP}$ 的条件）；次梯度优化算法与收敛性；体积算法；Benders 分解与逻辑 Benders 割
12	列生成、分支定价与近似算法	Dantzig-Wolfe 分解与列生成框架；定价问题与约束分支；分支定价法（Branch-and-Price）；近似算法与近似比（集合覆盖贪心的 $\ln n$ 比）；不可近似性结果（PCP 定理的启示）；整数规划的前沿方向（机器学习辅助求解、随机化分支）

2 参考资料

1. Wolsey, L.A. *Integer Programming.* 2nd ed., Wiley, 2020.
2. Nemhauser, G.L. & Wolsey, L.A. *Integer and Combinatorial Optimization.* Wiley, 1988.
3. Conforti, M., Cornuéjols, G. & Zambelli, G. *Integer Programming.* Springer, 2014.
4. Bertsimas, D. & Weismantel, R. *Optimization Over Integers.* Dynamic Ideas, 2005.
5. Schrijver, A. *Theory of Linear and Integer Programming.* Wiley, 1998.
6. Schrijver, A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency.* Springer, 2003.
7. Korte, B. & Vygen, J. *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms.* 6th ed., Springer, 2018.
8. Cook, W.J., Cunningham, W.H., Pulleyblank, W.R. & Schrijver, A. *Combinatorial Optimization.* Wiley, 1998.
9. Vazirani, V.V. *Approximation Algorithms.* Springer, 2001.
10. Achterberg, T. *Constraint Integer Programming.* PhD thesis, TU Berlin, 2007.