博弈论

多层次方法

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

课程简介

博弈论 (Game Theory) 是研究**策略互动**的数学理论，为分析多个理性决策者之间的冲突与合作提供了严格的形式化框架。本课程以 Hans Peters《Game Theory: A Multi-Leveled Approach》（第 2 版，Springer 2015）为主线，辅以 Osborne–Rubinstein、Myerson、Fudenberg–Tirole、Maschler–Solan–Zamir 等经典文献，系统讲解非合作博弈与合作博弈的核心理论。

课程涵盖策略式博弈与纳什均衡、混合策略与不动点方法（Brouwer/Kakutani）、扩展形博弈与子博弈完美均衡、重复博弈与 Folk 定理的构造性证明、合作博弈的核心 (Core) 与 Shapley 值的公理化唯一性、Nash–Kalai–Smorodinsky 谈判解与 Nash 纲领、机制设计的显示原理与 VCG 机制、拍卖理论的收益等价定理与 Myerson 最优拍卖、以及演化稳定策略 (ESS) 与复制动态的 Lyapunov 稳定性分析。

全部 10 讲注重**严格数学推导**与**经济直觉**的结合，强调公理化方法、不动点理论、LP 对偶、信息经济学与计算复杂性的内在联系。每讲均给出核心定理的完整证明，并讨论算法实现、计算复杂性与开放问题。

适合人群

- 经济学、管理学与金融学方向博士生，希望系统掌握博弈论理论基础与前沿工具
- 计算机科学研究者，对算法博弈论、机制设计、多智能体系统与 AI 对弈感兴趣
- 数学专业研究生，希望了解博弈论的公理化方法、不动点理论与组合结构
- 从事市场竞争分析、拍卖设计、平台经济、合同理论等领域的研究者与从业者
- 政治学与社会学方向学者，关注投票理论、权力指数与社会选择
- 运筹学与优化方向学生，希望理解博弈论与 LP 对偶、均衡计算的关系

前置知识

- 微积分：多元函数微分、隐函数定理、约束最优化（KKT 条件）、包络定理
- 线性代数：矩阵运算、向量空间、线性规划对偶与互补松弛
- 概率论：概率分布、条件概率与贝叶斯法则、期望与方差、随机变量的阶统计量
- 集合论与拓扑初步：紧集、凸集、连续映射、不动点定理的直觉
- 实分析基础（Brouwer/Kakutani 不动点定理部分）有帮助但非必须
- 微观经济学基础（效用理论、寡头竞争模型）有帮助但非必须

1 课程内容

讲次	主题	内容概要
1	博弈论导论：策略博弈	博弈的基本要素（参与者、策略集、支付函数）；策略式博弈的形式定义；博弈分类（合作/非合作、静态/动态、完全/不完全信息）；共同知识的形式化

讲次	主题	内容概要
2	Nash 均衡	最优反应 (Best Response) 与最优反应对应的性质；Nash 均衡的定义与不动点刻画；Brouwer 不动点定理的陈述与应用；Kakutani 不动点定理（集值映射版本）的条件与证明思路；Nash 存在性定理的完整证明（紧凸策略集、连续支付、拟凹性）；有限博弈的混合策略均衡存在性（Nash 1950 原始证明思路）；势博弈 (Potential Games) 与 Monderer–Shapley 定理；超模博弈 (Supermodular Games) 与单调比较静态；Bertrand 竞争、公共品博弈与拥塞博弈
3	混合策略与存在性定理	混合策略的形式定义与概率单纯形；期望支付的多重线性性；混合策略 Nash 均衡与支撑引理 (Support Lemma) 的完整证明；2×2 博弈的无差异方程求解；$2\times n$ 博弈的图解法；von Neumann 极大极小定理的三种证明（LP 对偶、Brouwer 不动点、凸集分离）；相关均衡 (Correlated Equilibrium) 与 LP 可解性（Aumann 1974）；NE 的 PPAD-完全性与 Lemke–Howson 算法；NE 的精炼：颤抖手完美均衡 (Trembling Hand Perfect Equilibrium, Selten 1975)
4	扩展形博弈	扩展式博弈的形式定义（博弈树、信息集、行为策略）；完美信息与不完美信息；Kuhn 定理（行为策略与混合策略的等价性）；逆向归纳法与 Zermelo 定理的完整证明；子博弈与子博弈完美均衡 (SPE) 的形式定义；不可置信的威胁与承诺的价值；Stackelberg 竞争与先动优势的分析；Rubinstein 交替出价谈判模型与 SPE 的唯一性证明
5	重复博弈	有限重复博弈与逆向归纳悖论；有限重复博弈的合作可能（Benoit–Krishna 定理）；无限重复博弈的形式定义与折现因子；冷酷触发策略 (Grim Trigger) 与合作的维持条件；以牙还牙策略 (Tit-for-Tat) 与 Axelrod 锦标赛；可行支付集与极小极大值；Folk 定理的精确陈述（Nash/SPE 版本）与构造性证明；重复 Cournot 竞争中的合谋；不完全监控下的重复博弈

讲次	主题	内容概要
6	合作博弈：核心与 Shapley 值	可转移效用 (TU) 合作博弈的形式定义与特征函数；分配 (Allocation)、个体理性与集体理性；核心 (Core) 的定义与凸多面体结构；核心非空的充要条件；Bondareva–Shapley 定理（平衡集条件）的完整 LP 对偶证明；Shapley 值的四条公理（效率、对称、空参与者、可加性）与唯一性的完整证明；一致博弈基 (Unanimity Basis) 方法与随机次序公式；凸博弈：Shapley 值属于核心的完整证明；Shapley–Shubik 权力指数与 Banzhaf 指数；应用：成本分配、投票权力、机场问题
7	讨价还价理论	谈判问题 (F, d) 的公理化框架与可行集的性质；Nash 谈判解的四条公理（帕累托最优、对称、仿射不变、IIA）与唯一性定理的完整证明；Nash 乘积公式 $\max(u_1 - d_1)(u_2 - d_2)$ 与几何解释；非对称 Nash 谈判解（广义 Nash 乘积）与谈判力的含义；Kalai–Smorodinsky 解：个体单调性替代 IIA 的公理化刻画；Nash 纲领 (Nash Program)：Rubinstein 交替出价模型中 $\delta \to 1$ 时收敛到 Nash 解的证明；其他谈判解（平等主义解、Perles–Maschler 解）
8	机制设计导论	社会选择函数与机制的形式定义；直接机制与间接机制；占优策略实施 (DSIC) 与贝叶斯实施 (BIC)；显示原理 (Revelation Principle) 的完整证明；拟线性环境 (Quasi-linear) 与 VCG 机制的推导；Clarke 枢纽支付 (Pivotal Payment) 与效率性证明；Gibbard–Satterthwaite 不可能性定理的陈述与证明思路（Arrow 定理的博弈论版本）；预算平衡与不可能性结果 (Green–Laffont)；AGV (d'Aspremont–Gérard-Varet) 机制与期望预算平衡
9	拍卖理论	独立私有价值 (IPV) 模型的形式化；二价密封拍卖 (Vickrey) 的占优策略均衡分析；一价密封拍卖的对称 Bayesian Nash 均衡推导；英式拍卖、荷式拍卖与密封拍卖的策略等价性；收益等价定理 (Revenue Equivalence Theorem) 的完整证明；最优拍卖设计：Myerson 引理（支付等价）与虚拟估价函数；Myerson 最优拍卖（保留价格的最优设定）；关联价值模型与赢者诅咒 (Winner's Curse)；Milgrom–Weber 关联不等式与英式拍卖的收益优势

讲次	主题	内容概要
10	演化博弈论	演化博弈论的生物学动机与有界理性假设；演化稳定策略 (ESS) 的定义与两个等价条件；ESS 与 Nash 均衡的关系（ESS $\Rightarrow$ NE，反之不一定）；鹰鸽博弈的 ESS 分析与生物学解释；复制动态 (Replicator Dynamics) 的微分方程推导；ESS 与渐近稳定性的关系定理及证明；Lotka–Volterra 方程与种群生态模型；进化与学习：虚拟博弈 (Fictitious Play) 与 Brown–Robinson 收敛；演化博弈论在经济学中的应用（惯例、制度演化）

2 参考资料

主教材

1. Peters, H. *Game Theory: A Multi-Leveled Approach.* 2nd Edition, Springer, 2015.

经典参考书

2. Osborne, M.J. & Rubinstein, A. *A Course in Game Theory.* MIT Press, 1994.
3. Myerson, R.B. *Game Theory: Analysis of Conflict.* Harvard University Press, 1991.
4. Fudenberg, D. & Tirole, J. *Game Theory.* MIT Press, 1991.
5. Maschler, M., Solan, E. & Zamir, S. *Game Theory.* Cambridge University Press, 2013.
6. Roth, A.E. (ed.) *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley.* Cambridge University Press, 1988.
7. Krishna, V. *Auction Theory.* 2nd Edition, Academic Press, 2010.
8. Weibull, J.W. *Evolutionary Game Theory.* MIT Press, 1995.
9. Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, É. & Vazirani, V.V. (eds.) *Algorithmic Game Theory.* Cambridge University Press, 2007.
10. Mailath, G.J. & Samuelson, L. *Repeated Games and Reputations: Long-Run Relationships.* Oxford University Press, 2006.
11. Mas-Colell, A., Whinston, M.D. & Green, J.R. *Microeconomic Theory.* Oxford University Press, 1995. [Ch. 7–9, 23]

原始论文

12. Nash, J.F. “Equilibrium Points in N-Person Games.” *Proc. NAS*, 36:48–49, 1950.
13. Nash, J.F. “The Bargaining Problem.” *Econometrica*, 18(2):155–162, 1950.
14. Shapley, L.S. “A Value for n-Person Games.” In *Contributions to the Theory of Games II* (Ann. Math. Stud. 28), pp. 307–317, 1953.
15. Selten, R. “Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfrageträgheit.” *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 121:301–324, 1965.

16. Harsanyi, J.C. "Games with Incomplete Information Played by 'Bayesian' Players, I–III." *Management Science*, 14:159–182, 320–334, 486–502, 1967–68.
17. Maynard Smith, J. & Price, G.R. "The Logic of Animal Conflict." *Nature*, 246:15–18, 1973.
18. Vickrey, W. "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders." *J. Finance*, 16(1):8–37, 1961.
19. Myerson, R.B. "Optimal Auction Design." *Math. Oper. Res.*, 6(1):58–73, 1981.
20. Rubinstein, A. "Perfect Equilibrium in a Bargaining Model." *Econometrica*, 50(1):97–109, 1982.
21. Kalai, E. & Smorodinsky, M. "Other Solutions to Nash's Bargaining Problem." *Econometrica*, 43(3):513–518, 1975.
22. Daskalakis, C., Goldberg, P.W. & Papadimitriou, C.H. "The Complexity of Computing a Nash Equilibrium." *SIAM J. Comput.*, 39(1):195–259, 2009.
23. Aumann, R.J. "Subjectivity and Correlation in Randomized Strategies." *J. Math. Econ.*, 1(1):67–96, 1974.