

动态规划

# 确定性与随机模型的最优决策理论

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

## 课程简介

动态规划 (Dynamic Programming) 是现代最优化理论与运筹学的核心分支, 研究如何在多阶段决策过程中确定最优策略。自 Richard Bellman 于 1957 年在其开创性著作 *Dynamic Programming* 中系统提出最优性原理以来, 动态规划已发展为一个融合概率论、泛函分析、测度论与数值方法的深刻数学体系。

本课程以 Hinderer、Rieder & Stieglitz 的专著 *Dynamic Optimization: Deterministic and Stochastic Models* (Springer, 2016) 为主要参考, 系统讲授动态规划的数学基础与核心算法。课程涵盖确定性动态规划、随机动态规划、最优停止问题、马尔可夫决策过程、值迭代与策略迭代、线性规划方法、近似动态规划、连续时间动态规划 (Hamilton-Jacobi-Bellman 方程) 以及典型应用专题。课程强调严格的数学推导与完整的收敛性证明, 同时结合 Bertsekas、Puterman、Powell 等经典文献, 帮助学员建立从离散到连续、从有限到无限、从精确到近似的完整理论框架。

## 适合人群

- 运筹学、应用数学、统计学、控制科学等方向的研究生
- 从事随机优化、强化学习、最优控制等方向的科研人员
- 希望深入理解 Bellman 最优性原理与马尔可夫决策过程理论的数据科学从业者
- 对序贯决策、多阶段随机优化及其金融工程应用有兴趣的研究者

## 前置知识

- 实分析与测度论:**  $\sigma$ -代数、可测函数、Lebesgue 积分、收敛定理 (单调收敛、控制收敛)
- 概率论:** 概率空间、随机变量、条件期望、鞅、马尔可夫链
- 泛函分析基础:** Banach 空间、压缩映射定理、算子范数
- 线性代数:** 矩阵分解、谱理论、正定矩阵
- 优化基础:** 凸分析、线性规划对偶理论 (有则更佳)

## 1 课程内容

### 讲次 主题

### 内容概要

- |   |               |   |
|---|---------------|---|
| 1 | 动态规划导论: 最优性原理 | 多阶段决策过程的测度论框架; 决策模型 (Decision Model) 的形式化定义; 策略与值函数; Bellman 最优性原理的严格表述与证明; 有限时域与无限时域概览 |
| 2 | 确定性动态规划       | 有限时域确定性模型; 最优性方程的推导与验证定理; 后向归纳法与前向递推; 最短路径与资源分配问题. 连续状态空间的处理                            |

讲次	主题	内容概要
6	值迭代与策略迭代	Bellman 算子的压缩性; Banach 不动点定理与值迭代收敛性; 策略评估与策略改进定理; 策略迭代的有限步收敛; 修改策略迭代与 Gauss-Seidel 迭代
7	线性规划方法	MDP 的线性规划等价形式; 原始 LP 与对偶 LP; 占用测度 (Occupation Measure) 的解释; 约束 MDP 的 LP 方法; 多链模型的 LP 处理
8	近似动态规划	维度灾难的本质; 近似值函数方法与投影 Bellman 方程; 时序差分学习与收敛性; Rollout 方法与蒙特卡洛树搜索; 神经动态规划与深度强化学习
9	连续时间动态规划 (HJB 方程)	连续时间最优控制的值函数; Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的推导; 验证定理; 粘性解理论简介; 线性二次调节器 (LQR) 与 Riccati 方程
10	动态规划的应用	库存管理中的 $(s, S)$ 策略与 $K$ -凸性; 动态投资组合优化; 排队系统的最优控制; 强化学习与动态规划的联系; 前沿研究方向

## 2 参考资料

1. **Hinderer, K., Rieder, U. & Stieglitz, M.** *Dynamic Optimization: Deterministic and Stochastic Models*. Springer, 2016.  
本课程主要参考教材。理论体系严谨完整, 涵盖确定性与随机模型、最优停止、连续时间 DP 等核心主题。
2. **Bertsekas, D. P.** *Dynamic Programming and Optimal Control*. Vols. I & II, 4th ed., Athena Scientific, 2017.  
动态规划领域最权威的教材之一。内容丰富, 包含大量应用实例与近似方法。
3. **Puterman, M. L.** *Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming*. Wiley, 2005.  
MDP 理论的标准参考。对策略迭代、线性规划方法有系统全面的阐述。
4. **Powell, W. B.** *Approximate Dynamic Programming: Solving the Curses of Dimensionality*. 2nd ed., Wiley, 2011.  
近似动态规划领域的权威著作。强调实际应用中的算法设计与实现。
5. **Fleming, W. H. & Soner, H. M.** *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. 2nd ed., Springer, 2006.  
连续时间随机控制与 HJB 方程的经典参考。对粘性解理论有深入阐述。
6. **Bertsekas, D. P. & Tsitsiklis, J. N.** *Neuro-Dynamic Programming*. Athena Scientific, 1996.  
近似动态规划与强化学习的奠基性著作。系统建立了 ADP 的理论框架。