组合优化

理论与算法

MarkZZZ WeChat: MarkZZZ20XX

课程简介

组合优化 (Combinatorial Optimization) 研究在离散结构上寻找最优解的数学理论与算法。本课程以多面体理论为核心工具，系统讲授图与网络上的经典优化问题：最小生成树、最短路径、网络流、匹配与覆盖、旅行商问题等。课程强调严格的数学证明——每个核心定理均给出完整证明，涵盖全幺模性 (Total Unimodularity)、全对偶整数性 (Total Dual Integrality)、拟阵 (Matroid) 理论、以及 NP-完全性理论等高级工具。

本课程目标是使学生掌握组合优化的核心理论与前沿方法，能够独立阅读 Schrijver *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency* 三卷本及相关研究文献。课程深度对标哈佛 CS 224、MIT 18.438、斯坦福 CS 369 等顶尖博士课程。

适合人群

- 运筹学、离散数学、理论计算机科学方向的博士研究生
- 从事整数规划、近似算法、图论算法研究的科研人员
- 希望深入理解多面体方法与组合结构的高年级硕士生
- 具备线性规划和图论基础、准备从事优化理论研究的学者

前置知识

- 线性代数：矩阵秩、行列式、线性方程组、向量空间、特征值
- 线性规划：单纯形法、对偶理论、Farkas 引理、互补松弛、灵敏度分析
- 图论基础：图的连通性、树、欧拉回路、平面图、二部图
- 算法分析：渐近记号、多项式时间算法、NP-完全性概念
- 推荐（非必须）：整数规划基础、凸优化初步

1 课程内容

讲次	主题	内容概要
1	组合优化导论	组合优化问题的形式化定义与多面体嵌入；计算复杂性理论 (P/NP/NP-complete/co-NP)；Karp 21 个 NP-完全问题与归约链；强 NP-难与伪多项式时间；近似算法与不可近似性（PCP 定理）；多面体方法概述（Minkowski–Weyl 定理）；LP 松弛与整数多面体；全幺模矩阵（TU）预览；GLS 定理（分离与优化等价）；LP 对偶与 min-max 定理；TDI 系统；课程路线图
2	图与连通性	图的连通度（顶点/边连通度）；Menger 定理的完整证明（max-flow min-cut 版与 König 版）；Whitney 关联矩阵秩定理；耳分解 (Ear Decomposition) 与 2-连通图刻画（Whitney 定理）；块-割点树 (Block-Cutpoint Tree)；Tutte 连通性定理；有向图的强连通分量（Tarjan 算法）；k-连通图的结构性质
3	最小生成树与拟阵	切割性质与环性质的严格证明；Borůvka/Kruskal/Prim 算法与正确性证明；拟阵 (Matroid) 公理系统（独立集、基、秩、环、对偶拟阵）；Rado–Edmonds 定理（贪心算法在拟阵上最优）；加权拟阵交 (Weighted Matroid Intersection)；生成树多面体（Edmonds 1970）；拟阵多面体与次模函数；Kirchhoff 矩阵树定理
4	最短路径	Dijkstra 正确性归纳证明与 $O(m + n \log n)$ 复杂度（Fibonacci 堆）；Bellman–Ford 算法与负权环检测证明；Johnson 算法（势函数方法/重赋权技术）；差分约束系统与最短路的对偶解释；代数路径问题（半环框架）；最短路多面体与 TDI
5	网络流（一）：最大流	最大流最小割定理的三种证明（增广路/LP 对偶/组合）；Ford–Fulkerson 有理终止性证明（无理反例）；Edmonds–Karp $O(VE^2)$ 复杂度证明（最短增广路）；Dinic 分层图算法 $O(V^2E)$；单位容量网络 $O(E\sqrt{V})$；最大流多面体与 TU
6	网络流（二）：Push-Relabel 与最小费用流	Push-Relabel 算法 $O(V^2E)$ 复杂度分析；最高标号启发式 $O(V^2\sqrt{E})$；最小费用流问题与 LP 建模；reduced cost optimality 条件；负环消除算法与 cycle-canceling 多项式化；网络流多面体：关联矩阵 TU 性与整数性；Hoffman 循环定理

讲次	主题	内容概要
7	匹配理论（一）：二部图匹配	König–Egerváry 定理完整证明（LP 对偶 + TU）；Hall 定理多种证法（LP 对偶/组合/拓扑）；Hungarian 算法（Kuhn 1955）及 $O(n^3)$ 实现；Birkhoff–von Neumann 定理（双随机矩阵 = 置换矩阵凸包）；Dilworth 定理（最长链 = 最少反链覆盖）；加权二部匹配多面体
8	匹配理论（二）：一般图匹配	Tutte 定理与 Tutte–Berge 公式完整证明；Edmonds 开花算法 (Blossom Algorithm)；匹配多面体完全描述 (Edmonds 1965)：奇集约束；匹配多面体 TDI 性证明；T-join 与 T-cut 理论；完美匹配多面体；Padberg–Rao 分离算法
9	旅行商问题与近似算法	TSP 的 NP-完全性证明（从 Hamilton Cycle 归约）；Subtour elimination LP 松弛与 subtour polytope；Held–Karp 拉格朗日下界 = subtour LP 最优值；最近邻/最近插入启发式分析；Christofides–Serdyukov $\frac{3}{2}$-近似完整证明；Karlin–Klein–Oveis Gharan $\frac{3}{2}-\varepsilon$ 突破；ATSP 近似（Svensson–Tarnawski–Végh 常数近似）
10	整数多面体与切割平面	全幺模矩阵（TU）的 Seymour 分解定理；Ghouila-Houri 刻画定理与充要条件；TDI 系统理论（Edmonds–Giles 1977）；Schrijver 定理（每个有理多面体有 TDI 描述）；Chvátal–Gomory closure 与切割平面；Chvátal 秩；组合优化的统一框架回顾

2 参考资料

1. Korte, B. & Vygen, J. *Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms*, 6th ed. Springer, 2018.
2. Schrijver, A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency*, Vols. A–C. Springer, 2003.
3. Grötschel, M., Lovász, L. & Schrijver, A. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, 2nd ed. Springer, 1993.
4. Papadimitriou, C.H. & Steiglitz, K. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*. Dover, 1998.
5. Cook, W.J., Cunningham, W.H., Pulleyblank, W.R. & Schrijver, A. *Combinatorial Optimization*. Wiley, 1998.
6. Conforti, M., Cornuéjols, G. & Zambelli, G. *Integer Programming*. Springer, 2014.
7. Oxley, J. *Matroid Theory*, 2nd ed. Oxford University Press, 2011.

8. Williamson, D.P. & Shmoys, D.B. *The Design of Approximation Algorithms.* Cambridge University Press, 2011.
9. Vazirani, V.V. *Approximation Algorithms.* Springer, 2001.
10. Lovász, L. & Plummer, M.D. *Matching Theory.* AMS Chelsea, 2009.